Aceleração pela NBR 6123

Cálculo da aceleração máxima via metodologia do item 9.3.2 da NBR 6123

Autor: Sergio Ricardo Pinheiro Medeiros

1. Fundamentos do processo para determinação da ação dinâmica do vento

Na análise estrutural de edificações, usualmente, admite-se que o fluxo do vento é unidirecional e que sua velocidade pode ser dividida em duas parcelas. A primeira é igual à velocidade média do vento e a segunda, de caráter aleatório, tem intensidade variável ao longo do tempo.

Consequentemente, a ação total do vento na direção da sua velocidade média também é composta de duas parcelas: uma ação média de intensidade constante e outra flutuante.

A parcela da ação do vento a ser considerada na determinação da resposta dinâmica é a flutuante.

2. Equação de equilíbrio

A equação de equilíbrio dinâmico para as estruturas constituídas por material elástico linear, supondo-se o amortecimento viscoso, e discretizadas via elementos finitos é:

$\mathbf{MU''(t) + CU'(t) = F(t)}$	(1)

onde:

N : número de graus de liberdade do modelo discreto

M : matriz massa, de ordem N x N

C : matriz de amortecimento, de ordem N x N

K : matriz de rigidez, de ordem N x N

U''(t) : vetor coluna acelerações, de ordem N

U'(t) : vetor de velocidades, de ordem N

U(t) : vetor coluna deslocamentos, de ordem N

F(t) : Vetor coluna de cargas externas, de ordem N

No capítulo 9 da NBR 6123, o cálculo da resposta estrutural é realizado através do método da superposição modal. Nesse método, emprega-se a seguinte mudança de coordenadas:

$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\Phi\eta}(t)$	(2)

Na equação acima, $\boldsymbol{\Phi}$ representa a matriz modal, cujas colunas $\boldsymbol{\Phi}_r$ são os modos de vibrações livres não amortecidas da estrutura, i.e., as soluções do problema de autovalores / autovetores:

$\mathbf{K\Phi}_r = \omega_r^2 \mathbf{M}\, \boldsymbol{\Phi}_r$	r = 1, 2 , ... , N	(3)

E $\boldsymbol{\eta}(t)$ representa o vetor das respostas modais.

A variável ω_r da equação (3) é denominada de frequência angular e pode ser expressa como:

$\omega_r = 2\,\pi\,f_r$	r = 1, 2, ... , N	(4)

onde f_r é a frequência natural correspondente ao r-ésimo modo de vibração.

Substituindo (2) em (1) e pré-multiplicando (1) por $\boldsymbol{\Phi}^t$, obtém-se:

$\boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{\eta}''(t) + \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{\eta}'(t) + \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{F}(t)$	(5)

De (3) decorre que as matrizes $\boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{M}\, \boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{K}\, \boldsymbol{\Phi}$ são diagonais. Assumindo-se que a matriz **C** possa ser calculada a partir de uma combinação linear de **M** e **K** (amortecimento de Rayleigh), a matriz $\boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{C}\, \boldsymbol{\Phi}$ também será diagonal.

Deste modo, a equação de equilíbrio dinâmico (1) pode ser representada na base formada pelos modos de vibração através de N equações escalares desacopladas, uma para cada modo, como descrito a seguir:

$m_r\, \eta_r''(t) + c_r\, \eta_r'(t) + k_r\, \eta_r(t) = F_r^*(t)$	r = 1, 2, ... , N	(6)

onde:

$\eta_r(t)$: r-ésimo termo de $\boldsymbol{\eta}(t)$;

$m_r = \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{M}\, \boldsymbol{\Phi}$**:** massa modal;

$c_r = \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{C}\, \boldsymbol{\Phi}$: amortecimento modal;

$k_r = \boldsymbol{\Phi}^t \mathbf{K}\, \boldsymbol{\Phi}$: rigidez modal;

$F_r^* = \boldsymbol{\Phi}_r^t\, \mathbf{F}(t)$: Força modal generalizada;

3. Aceleração máxima devida á ação do vento

Considerando-se que a ação flutuante do vento é um processo aleatório ergódigo de média zero, tem-se a seguinte relação entre o espectro de potência da resposta modal η_r e o da força modal generalizada F_r^*:

$S_{\eta r}(f) = \lvert H_r(f) \rvert^2\, S_{Fr^*}(f)$	r = 1, 2, ..., N	(7)

Sendo $\lvert H_r(f) \rvert$ a admitância mecânica, definida como:

$\lvert H_r(f) \rvert = \{ k_r\, [\, (1 - \beta_r^2)^2 + (2\, \zeta_r\, \beta_r)^2\,]^{1/2} \}^{-1}$	(8)

onde:

f : variável frequência;

f_r : frequência natural associada ao modo de vibração de ordem r;

$\beta_r = f / f_r$

$\zeta_r = c_r / (4 \pi m_r f_r)$: razão de amortecimento crítico

O desvio padrão da resposta modal será:

$\sigma_{\eta r} = \{ \int_0^{\infty} \lvert H_r(f) \rvert^2 S_{Fr*}(f)\, df \}^{1/2}$	$r = 1, 2, \dots, N$	(9)

E o valor máximo provável de η_r (valor de pico) será:

$(\eta_r)_{max} = g\, \sigma_{\eta r}$	$r = 1, 2, \dots, N$	(10)

sendo g o fator de pico da resposta.

Então, para o modo de vibração de ordem r, a resposta de pico pode ser expressa por:

$\hat{\mathbf{U}}_r = g\, \sigma_{\eta r}\, \boldsymbol{\Phi}_r$	(11)

No item *9.5 Cálculo de acelerações máximas para verificação de conforto da NBR 6123/* está escrito que:

Se u_j denota o deslocamento no nível z devido à resposta flutuante no modo j, a amplitude máxima da aceleração neste nível pode ser calculada pela expressão:

$a_j = 4 \pi^2 f_j^2 u_j$

Cabe salientar que existe um erro ortográfico na norma e o termo u_j da expressão acima se encontra elevado ao quadrado.

Escrevendo essa expressão da norma na notação adotada neste texto, tem-se:

$a_{ir} = 4 \pi^2 f_r^2 u_{ir}$	(12)

onde:

i : grau de liberdade correspondente ao nível z

r : índice do modo de vibração considerado

De (4) e (12), tem-se:

$\mathbf{a}_r = \omega_r^2\, \mathbf{u}_r$	(13)

Considerando-se as expressões (11) e (13), a componente da aceleração máxima, devida ao modo de vibração de ordem r, atuante no o i-ésimo grau de liberdade do modelo estrutural será:

$\hat{a}_{ir} = (g\, \sigma_{\eta r}\, \omega_r^2)\, \Phi_{ir}$	(14)

No apêndice A deste texto, é apresentada a dedução do desvio padrão da resposta modal $\sigma_{\eta r}$ para estruturas sujeitas às ações flutuantes do vento definidas segundo a NBR 6123, chegando-se a seguinte expressão:

$\sigma_{\eta r} = (\gamma_r / m_r) \Sigma \Phi_{kr} (z_{ref} / z_k)^p F_k^V$	(15)

onde:

γ_r : parâmetro definido pela expressão (15 a) do apêndice A;

z_{ref} : altura de referência;

z_k : altura do nó da estrutura com k-ésimo grau de liberdade;

p : parâmetro meteorológico definido no apêndice A da NBR 6123;

A_k: área de exposição associada ao k - ésimo grau de liberdade;

F_k^V: força que o vento médio exerce na área de exposição A_k, definida pela expressão (5a) do apêndice A.

Substituindo (16) em (15), tem-se:

$\hat{a}_{ir} = (g\, \omega_r^2)\, \Phi_{ir}\, (\gamma_r / m_r)\, \Sigma \Phi_{kr} (z_{ref} / z_k)^p F_k^V$	(16)
$\hat{a}_{ir} = \{ \Sigma \Phi_{kr} (z_{ref} / z_k)^p F_k^V \} (g\, \omega_r^2 \gamma_r) / m_r \Phi_{ir}$	(17)

Fazendo-se:

$\xi_r = (g\, \omega_r^2 \gamma_r)$	(18)

Tem-se:

$\hat{a}_{ir} = \{ \Sigma \Phi_{kr} (z_{ref} / z_k)^p F_k^V \} \xi_r / m_r \Phi_{ir}$	(19)

E finalmente:

$\hat{a}_{ir} = F_r^H \Phi_{ir}$	(20)

onde:

$F_r^H = \{ \Sigma \Phi_{kr} (z_{ref} / z_k)^p F_k^V \} \xi_r / m_r$	(21)

A variável ξ definida pela expressão (18) é adimensional e denominada de coeficiente de amplificação dinâmica. A NBR 6123, no seu capítulo 9, apresenta ábacos para o cálculo desse coeficiente para as suas cinco categorias de terreno. Tais ábacos foram gerados por Galindez [1], supondo um fator de pico da resposta g igual a 4 e uma forma modal linear. Além desses dois parâmetros, a construção desses ábacos também depende [2]: do perfil de velocidades médias do vento, da razão do amortecimento crítico, das dimensões da superfície frontal da edificação, da frequência natural do modo de vibração e da velocidade de projeto do vento.

4.Implementação computacional

No Sistema CAD/TQS®, as componentes máximas da aceleração nas direções globais X e Y da estrutura devida a ação do vento são calculadas através dos seguintes passos:

a) Cálculo dos modos de vibração e das frequências naturais do modelo estrutural;

b) Identificação dos dois modos fundamentais de flexão da estrutura (Φ_{rk}) (k=1,2);

c) Para cada um desses dois modos de vibração de flexão da estrutura, cálculo do vetor aceleração:

$\hat{a}_{irk} = F_{rk}^{H} \, \Phi_{irk}$ i = 1,2, ... , N através das expressões (20) e (21);

d) Combinação das contribuições dos dois modos de flexão para a aceleração através do método SRSS (Square Root of Sum of Squares). Nesse método, a superposição das acelerações relativas aos dois modos flexionais é calculada a partir da raiz quadrada da soma dos quadrados dos seus termos:

$\hat{a}_i = \{ \hat{a}_{ir1}^2 + \hat{a}_{ir2}^2 \}^{1/2}$ i = 1,2, ... , N

e) Determinação do valor máximo das componentes da aceleração nas direções globais X e Y da estrutura:

$\hat{a}_x$ = máximo ($\hat{a}_i$) onde:

1 < i <= N e i corresponde a um grau de liberdade de translação na direção X;

$\hat{a}_y$ = máximo ($\hat{a}_j$) onde:

1 < j <= N e corresponde a um grau de liberdade de translação na direção Y;

Esclarecimentos importantes:

I) O emprego do método deve se restringir a edifícios para os quais as duas menores frequências estejam associadas aos dois modos fundamentais de flexão das suas estruturas. Ademais, nesses modos, não deve existir acoplamento significativo entre deslocamentos laterais e rotações de torção;

II) A velocidade média do vento utilizada no cálculo das forças médias F_k^V é a velocidade característica sobre um intervalo de 600s:

$V_k = V_0 \, S_1 \, S_2 \, S_3$

Onde:

V_0 - Velocidade básica do vento;

S_1 - Fator topográfico;

S_2 - Fator relativo à rugosidade do terreno;

S_3 - Fator baseado em conceitos probabilísticos.

III) Conforme prescrito pela ABNT NBR 6123, no seu item 9.5:

"Considera-se admissível que a amplitude máxima de acelerações seja excedida, em média, uma vez em cada 10 anos."

Então, na implementação do procedimento de cálculo da aceleração máxima descrito neste texto, adota-se o fator probabilístico S_3 da velocidade característica do vento igual a 0,78, correspondente a um período de retorno de 10 anos com uma probabilidade de ocorrência de 63%.

Apêndice A - Dedução do desvio padrão da resposta modal

O procedimento adotado neste apêndice para a dedução da expressão do desvio padrão da resposta modal,

$\sigma_{\eta r} = \{ \int_0^{\infty} \lvert H_r (f) \rvert^2 S_{Fr*}(f)\, df \}^{1/2}$	$r = 1, 2, \dots , N$	(1a)

de estruturas sujeitas às ações flutuantes do vento segue o exposto na dissertação de mestrado de Galindez [1], cujos resultados serviram de base para elaboração da NBR 6123 [3].

Assume-se também que para cada grau de liberdade de translação dos nós da estrutura exista uma zona de integração de pressões, com uma área de exposição A_i e um coeficiente de arrasto C_{ai}. De tal modo que as forças aerodinâmicas sejam aplicadas nos respectivos graus de liberdade do vetor de forças externas **F**(t).

Inexistem zonas de integração de pressões associadas aos graus de liberdade de rotação. Variáveis que dependam de tais zonas de integração de pressões para sua definição são assumidas como nulas nas expressões matemáticas deste apêndice.

1. Relação entre a densidade espectral de potência da força modal generalizada S_{Fr*} (f)e o espectro cruzado das forças externas S_{Fij} (f) nas zonas de integração i e j

$S_{Fr*} (f) = \Sigma\Sigma\ \Phi_{ir}\ \Phi_{jr}\ S_{Fij} (f) / m_r^2$	(2a)

2. Relação entre os espectros cruzados das forças externas S_{Fij}(f) e os da velocidade flutuante do vento S_{Vij}(f) nas zonas de integração i e j

$S_{Fij} (f) = (\rho^2 A_i A_j C_{ai} C_{aj} V_i V_j X_i X_j) S_{vij} (f)$	(3a)
$S_{Fij} (f) = (4/ V_i V_j) (1/2\ \rho A_i C_{ai} V_i^2) (1/2\ A_j C_{aj} V_j^2) X_i X_j S_{vij} (f)$	(4a)

onde:

ρ: massa específica do ar;

A_k : área de exposição associada ao k-ésimo grau de liberdade;

C_{ak} : coeficiente de arrasto na área A_k

V_k: velocidade média do vento no nó com grau de liberdade k;

X_k : admitância aerodinâmica na área de exposição A_k ;

A força que o vento médio exerce na área de exposição é dada por:

$F_k^V = 1/2\ (\rho A_k C_{ak} V_k^2)$	(5a)

Substituindo (5a) em (4a), chega-se a:

$S_{Fij}(f) = (4/V_i V_j)\, F_i^V F_j^V X_i X_j S_{vij}(f)$	(6a)

3. Espectro cruzado da velocidade flutuante do vento da NBR 6123

$S_{Vij}(f) = S_1(f)\, R_{ij}(f, \Delta y, \Delta z)$	(7a)

onde:

$S_1(f)$: espectro de turbulência de Harris;

Δy: diferença entre as coordenas horizontais y dos nós com graus de liberdades i e j;

Δz: diferença entre as coordenas verticais y dos nós com graus de liberdades i e j;

$R_{ij}(f, \Delta y, \Delta z)$: coeficiente de correlação;

4. Espectro cruzado das forças externas nas zonas de integração i e j

Substituindo (7a) na equação (6a), tem-se:

$S_{Fij}(f) = (4/V_i V_j)\, F_i^V F_j^V X_i X_j S_1(f)\, R_{ij}(f, \Delta y, \Delta z)$	(8a)

Adotando-se a lei potencial para a descrição do perfil vertical da velocidade média:

$V_i = V_{ref}\,(z_i / z_{ref})^p$	(9a)

onde:

z_i : coordenada vertical z do nó com i-ésimo grau de liberdade;

z_{ref} : coordenada vertical z de referência, em geral igual a 10 m;

p: parâmetro função da rugosidade do terreno e do intervalo de tempo, definido no apêndice A da NBR 6123

V_i : velocidade média da coordenada vertical igual a zi;

V_{ref} : velocidade média na coordenada vertical igual a z ref;

Resulta que:

$(1/V_iV_j) = (1/V_{ref}^2)\,[z_{ref}^2 / (z_i z_j)]^p$	(10a)

Substituindo (10a) em (8a), obtém-se:

$S_{Fij}(f) = (4/V_{ref}^2)\,[z_{ref}^2 / (z_i z_j)]^p F_i^V F_j^V X_i X_j S_1(f)\, R_{ij}(f, \Delta y, \Delta z)$	(11a)

5. Desvio padrão da resposta modal

Substituindo (11a) em (2a):

$S_{Fr*}(f) = (\Sigma\Sigma\Phi_{ir}\, \Phi_{jr}\, 4\, (1/V_{ref}^2)\, [\, z_{ref}^2 /(z_i\, z_j)\,]^p\, F_i^V\, F_j^V\, X_i\, X_j\, S_1(f)\, R_{ij}\, (f, \Delta y, \Delta z\,))/\, m_r^2$	(12a)

E, em seguida, substituindo (12a) em (1a):

$\sigma_{\eta r} = \Sigma\Sigma\, \Phi_{ir}\, \Phi_{jr} / m_r^2\, [\, z_{ref}^2 / (z_i\, z_j)]^p\, F_i^V\, F_j^V\, \gamma_{rij}^2$	(13a)

onde:

$\gamma_{rij}^2 = 4 \int_0^{\infty} \|H_r (f)\|^2 (S_1(f) / V_{ref}^2)\, R_{ij}\, (f, \Delta y, \Delta z)\, X_i X_j\, df$	(14a)

Admitindo-se que os termos γ_{rij}^2 possam ser substituídos por um valor médio:

$\gamma_r^2 = 4 \int_0^{\infty} \|H_r (f)\|^2 (S_1(f) / V_{ref}^2)\, \|R_{ij}\, (f, \Delta y, \Delta z) X_i X_j\|_{medio}\, df$	(15a)

Tem-se:

$\sigma_{\eta r} = \{(\gamma_r^2 / m_r^2)(\, \Sigma\Sigma\, \Phi_{ir}\, \Phi_{jr}\, [\, z_{ref}^2 /(z_i\, z_j)\,]^p\, F_i^V\, F_j^V)\, \}^{1/2}$	(16a)

Rearranjando-se seus termos, a expressão (16a) pode ser reescrita como:

$\sigma_{\eta r} = \{(\gamma_r^2 / m_r^2)(\, \Sigma\Sigma((\Phi_{ir}\, [\, z_{ref}^2 / z_i]^p\, F_i^V)\, (\Phi_{jr}\, [\, z_{ref}^2 / z_j]^p\, F_j^V))\}^{1/2}$	(17a)

Finalmente, lembrando que $\Sigma\Sigma\, x_i x_j = (\Sigma\, x_k)^2$, conclui-se que:

$\sigma_{\eta r} = (\gamma_r / m_r)\, \Sigma\, \Phi_{jr}\, (z_{ref}^2 / z_k)^p\, F_k^V$	(18a)

6. Velocidade básica

A velocidade média característica para a categoria do terreno i é igual a:

$V_{k,i} = S_1 \,.\, S_2 \,.\, S_3 \,.\, V_0$

Onde:

V_0 = velocidade básica;

S_1 : fator topográfico;

$S_2 = F_r \,.\, b.\, (Z/10)^p$

S_3 : fator probabilístico;

Z : altura relativa do terreno;

F_r : fator de rajada.

Os valores de p e b para cada categoria são listados na tabela 20 da NBR 6123.

A NBR 6123 indica um intervalo de 600s para cálculo da velocidade média.

Considerando-se a velocidade média sobre esse intervalo tem-se:

$F_r = 0{,}69$.

Logo,

$S_2 = 0{,}69 \,.\, b.\, (Z/10)^p$

A velocidade $V_{k,i}$ sobre 600s é utilizada pela rotina do TQS no cálculo das forças médias devidas à ação do vento aplicadas a edificação.

A **Velocidade de projeto** V_p é igual a:

$V_p = 0{,}69.\, S_1 \,.\, S_3 \,.\, V_0$

Essa expressão corresponde à velocidade média característica sobre 600s a 10m de altura em um terreno de categoria II (b=1), ou seja:

$V_p = V_{k,}$ II a 10m

A velocidade de projeto é utilizada pelo TQS para determinar os coeficientes de amplificação dinâmica através dos gráficos das figuras 14 a 18 da NBR 6123.

Referências

[1] Galindez, E. E.: "Resposta Dinâmica de Estruturas na Direção da Velocidade Média do Vento". Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1979.

[2] Blessmann, J.: "Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento", 2 ed, Editora da UFRGS. Porto Alegre, 2005.

[3] ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023. NBR-6123: Forças Devidas ao Vento em Edificações.